El solitario del ejército de Conway sobre tableros triangulares

Pablo Guerrero Francisco Gutiérrez Blas C. Ruiz

Dpto. de Lenguajes y Ciencias de la Computación

Dpto. de Matemática Aplicada

Universidad de Málaga

E.T.S.I. Informática. Campus Teatinos, 29071–Málaga, España

e–mail: {pablito,pacog,blas}@lcc.uma.es

fax: +34–5–2131397

Resumen

De entre los solitarios consistentes en eliminar fichas siguiendo los movimientos del juego de las damas, es bien conocido el solitario del ejército (*solitaire army*) de Conway, quien en 1976 proporcionó una elegante demostración de la inalcanzabilidad del nivel 5 jugando sobre el retículo. En este artículo analizamos dicho solitario cuando el tablero de juego es un tablero triangular, en el cual la riqueza de movimientos es mayor; en este caso se demuestra la inalcanzabilidad del nivel 7 utilizando la pagoda de oro, se muestran las soluciones para los niveles del 1 al 5, y se resuelve el problema no trivial del estudio de la alcanzabilidad del nivel 6 manteniendo la estructura triangular del tablero.

0 Planteamiento del problema

Los *tableros de Abreu* son tableros formados a base de triángulos equilateros como el de la izquierda de la figura 0. Los movimientos válidos son saltos como en el juego de damas; por ejemplo, si las casillas 7 y 8 están ocupadas y la 9 está libre, podemos pasar la ficha de la casilla 7 hasta la casilla 9 comiendo (eliminando) la ficha de la casilla 8; esto es válido en cualquier dirección para cualesquiera casillas alineadas y contiguas (figura 0 a la derecha).

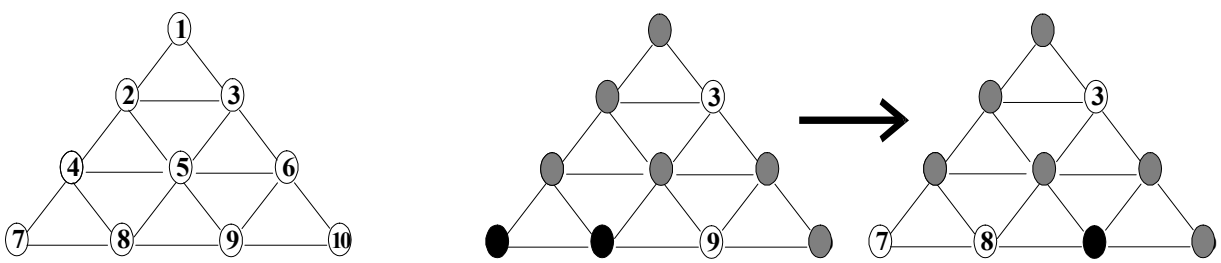

Figura 0. Piezas, tablero y movimientos permitidos

En resumidas cuentas:

$$\text{Equipamiento} \begin{cases} \text{Piezas: preferiblemente insertables (}\textit{pegs}\text{)} \\ \text{Tablero: a base de triángulos equiláteros} \\ \text{Movimientos permitidos: saltos como en el juego de las damas} \end{cases}$$

El problema que plantearemos a continuación tiene como precedente el *solitario del ejército* (*Solitaire Army*) (ver [BCG82]) de John Conway (ver figura 1) en cuanto a piezas y movimientos permitidos pero jugando sobre un retículo; el problema consiste en determinar el número de piezas necesario para conseguir que una pieza alcance los distintos niveles:

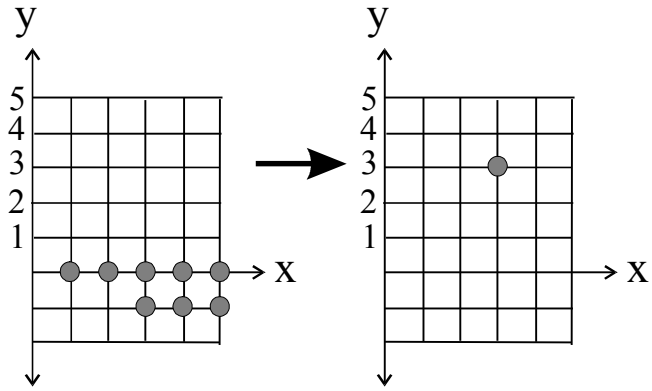

Figura 1. El solitario del ejército de Conway sobre un retículo

En este artículo se estudian los *solitarios de Conway sobre tableros de Abreu*: en un tablero de Abreu con un número indeterminado de filas y partiendo de tantas fichas como sea necesario colocadas de forma que las p primeras filas estén vacías, se trata de describir los movimientos necesarios para que una ficha pueda alcanzar el vértice superior del tablero (ver figura 2). Las soluciones deben utilizar el mínimo número de fichas posibles (i.e., al estilo de Conway en [Hon76]) y con el menor número de filas posible.

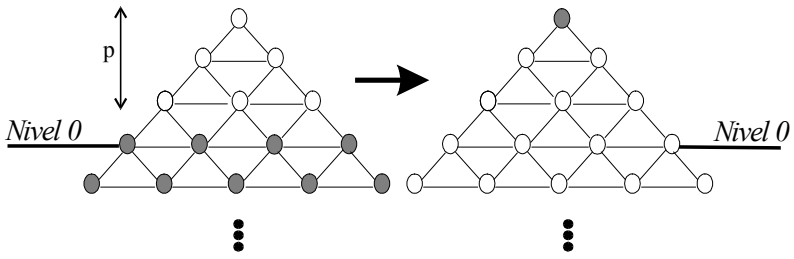

Figura 2. Solitarios de Conway sobre tableros de Abreu

1 Inalcanzabilidad del séptimo nivel

John Conway proporciona en [Hon76] una elegante demostración de la inalcanzabilidad del nivel 5 utilizando la técnica de las *funciones pagoda*:

1. Asignar a cada casilla un número real positivo

2. Utilizar la operación + en $\mathbb{R}^+$ de forma que la **suma** de los números de las casillas ocupadas no se incremente tras un movimiento

Así, es fácil ver que para el solitario en cuestión la pagoda de oro (siendo $a = (\sqrt{5}-1)/2$) y la pagoda Fibonacci son funciones pagoda:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & a & & a & & & \\ & & a^2 & & a^2 & & a^2 & & \\ & a^3 & & a^3 & & a^3 & & a^3 & \\ a^4 & & a^4 & & a^4 & & a^4 & & a^4 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 8 & & & & \\ & & & 5 & & 5 & & & \\ & & 3 & & 3 & & 3 & & \\ & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

Se puede utilizar la pagoda de oro para demostrar el siguiente:

Teorema 1.1

Independientemente del número de filas que tenga el tablero de Abreu, si las siete primeras filas están vacías es imposible que ninguna de las piezas de las filas inferiores alcance el vértice superior.

Demostración: el lector interesado puede ver [GGR98]. □

2 ¿Son alcanzables los demás niveles?

La construcción de las soluciones para alcanzar los niveles del 1 al 4 no presenta mayores dificultades. La complejidad del problema de construir la solución para el nivel 5 es comparable a la del solitario del ejército de Conway en el retículo para el nivel 4, y el problema de la alcanzabilidad del nivel 6 no es en absoluto trivial aún cuando se permita extender el tablero por los laterales. Si prohibimos dicha extensión el problema es aún más difícil, y la construcción de la solución junto con la búsqueda de una pagoda que demuestre su inalcanzabilidad asegura el entretenimiento para el lector durante varios días. En [GGR98] se puede encontrar la respuesta a dicha pregunta.

Bibliografía

[BCG82] Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway y Richard K. Guy. *WinningWays for your mathematical plays; Vol. 2: Games in particular.* Academic Press; pp. 697–734, 1982.

[Hon76] Ross Honsberger. *The Dolciani Mathematical Expositions; Number Two: Mathematical Gems II.* The Mathematical Association of America, 1976; capítulo 3, páginas 23–28.

[GGR98] Pablo Guerrero, Francisco Gutiérrez y Blas Carlos Ruiz. *Solitarios Triangulares y Álgebra Elemental.* Pendiente de publicación en Quesada, J.F.(ed.) 1998. *Mathematics and Languages: Logical, Semiotic, Social and Computational Perspectives.* Sevilla (Spain): SAEM Thales/ICME-8; capítulo 10, páginas 141–164.