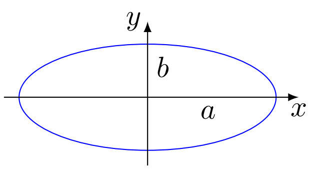
Apéndice al Tema 3 (Geometría Diferencial)

Ejemplos de Curvas y Superficies en el espacio

Curso 2011/12

1. Algunas curvas planas y alabeadas

Elipse



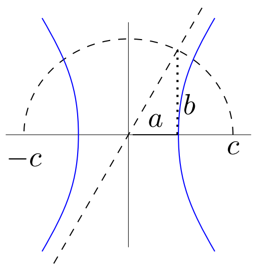
Una elipse centrada en el origen de semiejes a y b tiene por ecuación implícita

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y se parametriza como

$$x = a\cos t;\ \ y = b\,\mathrm{sen}\, t; \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Hipérbola



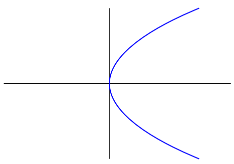
La hipérbola centrada en el origen de semiejes a y b tiene por ecuación implícita

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta curva está formada por dos ramas que se parametrizan como

$$x = a\cosh t;\ \ y = b\,\mathrm{senh}\, t; \qquad t \in [-\infty, \infty]$$
$$x = -a\cosh t;\ \ y = b\,\mathrm{senh}\, t; \qquad t \in [-\infty, \infty]$$

Parabola



La parábola es una curva muy conocida de ecuación implícita

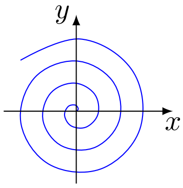
$$x - ay^2 = 0$$

y que se parametriza como

$$x = at^2;\ \ y = t$$

donde t toma cualquier valor real.

Espiral de Arquímedes



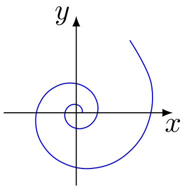
La espiral de Arquímedes, también llamada espiral aritmética, es una curva plana parametriza como

$$x = at\cos t;\ \ y = at\,\mathrm{sen}\, t; \qquad t \in [0, \infty)$$

y que en coordenadas polares toma la siguiente expresión:

$$\rho = a\theta$$

Espiral logartímica



La espiral logarítmica tiene como ecuación en coordenadas polares

$$\rho = ae^{b\theta} \text{ o bien } \theta = \frac{\log\left(\frac{\rho}{a}\right)}{b}$$

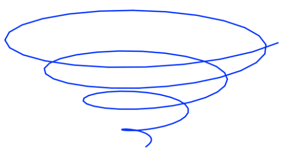
de ahí su nombre. En forma paramétrica se expresa:

$$\alpha(t) = (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\,\mathrm{sen}\, t); \qquad t \in [0, \infty)$$

La espiral logarítmica aparece frecuentemente en la naturaleza.

También se relaciona la espiral logarítmica con los números de Fibonacci y con la proporción áurea[1].

Curvas helicoidales



Ya conocemos la curva alabeada llamada *hélice*. En general una curva helicoidal se define a partir de una curva plana $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ de la forma

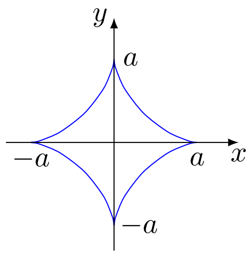
$$\beta(t) = (x(t), y(t), bt)$$

Así, la imagen de la izquierda representa una espiral helicoidal definida a partir de la espiral de Arquímedes

$$\beta(t) = (at\cos t, at\,\mathrm{sen}\, t, bt)\,; \qquad t \in [0, \infty)$$

[1] Véase el artículo “espiral logarítmica” en Wikipedia.

Astroide



El astroide de radio a es una curva cerrada que tiene por ecuación implícita

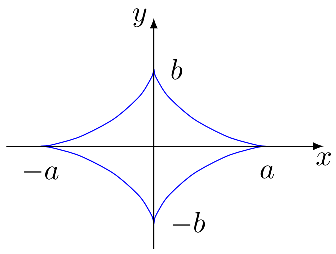
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

y por ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= a\cos^3 t \\ y &= a\,\mathrm{sen}^3\, t \end{aligned} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

El astroide no es regular, tiene cuatro puntos singulares en $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$ y $t = \frac{3\pi}{2}$.
Esta curva se puede formar haciendo rodar una circunferencia de radio $a/4$ en el interior de una circunferencia de radio a.

Astroide elíptico



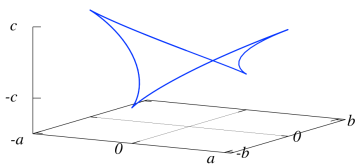
El astroide elíptico de semiejes a y b generaliza al astroide y tiene por ecuación implícita

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

y por ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= a\cos^3 t \\ y &= b\,\mathrm{sen}^3\, t \end{aligned} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Astroide alabeado



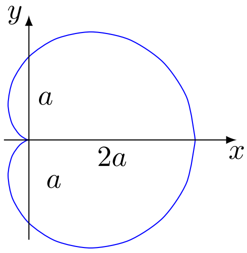
Esta curva alabeada es una generalización de la curva plana anterior.

Su representación gráfica es la del dibujo de la izquierda y tiene por parametrización

$$\alpha(t) = \big(a\cos^3 t, b\,\mathrm{sen}^3\, t, c\cos(2t)\big)$$

donde el parámetro t varía en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Cardioide



Curva plana cerrada que toma su expresión más fácil y conocida en en coordenadas polares

$$\rho = 2a(1 + \cos\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

y tiene por ecuación implícita

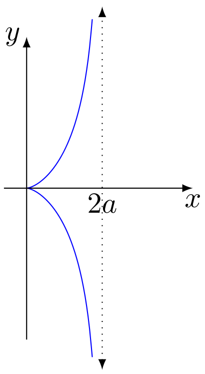
$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

Por último, sus ecuaciones paramétricas son

$$\begin{aligned} x &= 2a(1 + \cos t)\cos t \\ y &= 2a(1 + \cos t)\,\mathrm{sen}\, t \end{aligned} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Obsérvese que no es una curva regular puesto que tiene un punto singular en $t = \pi$.

Cisoide de Diocles



Tiene como ecuación implícita

$$x^3 + xy^2 = 2ay^2$$

y por ecuación en coordenadas polares

$$\rho = 2a \tan\theta \operatorname{sen}\theta$$

que sólo tiene sentido en los valores en los que está definido la tangente, es decir, $\theta \neq \frac{\pi}{2} \pm k\pi$.

Por tanto, una parametrización de la cisoide de Diocles es la siguiente:

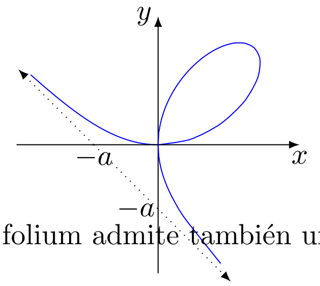
$$\begin{aligned} x &= 2a \operatorname{sen}^2 t \\ y &= 2a \tan t \operatorname{sen}^2 t \end{aligned} \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

La cisoide admite también una parametrización no trigonométrica

$$\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad \text{definida } \alpha(t) = \left(\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2}\right)$$

Obsérvese que es una curva asintótica en la recta $x = 2a$ y tiene una singularidad en $t = 0$.

Folium de Descartes



Tiene como ecuación implícita

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

y por ecuación en coordenadas polares

$$\rho = 3a\frac{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta}$$

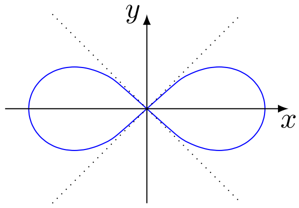
que nos permite dar una parametrización.

El folium admite también una parametrización no trigonométrica

$$\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad \text{definida } \alpha(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3}\right)$$

El folium es una curva asintótica en la recta $x + y + a = 0$ y tiene una singularidad en $t = -1$.

Lemniscata de Bernouille



Tiene como ecuación implícita

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

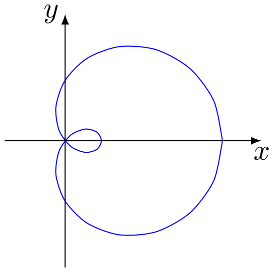
y por ecuación en coordenadas polares

$$\rho = a\sqrt{\cos(2\theta)}$$

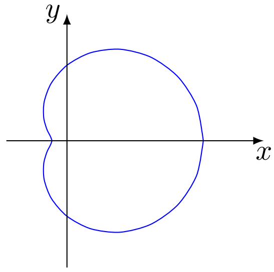
que nos proporciona la siguiente parametrización:

$$\alpha(t) = \left(a\sqrt{\cos(2t)}\cos t, a\sqrt{\cos(2t)} \operatorname{sen} t\right) \quad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

Caracol de Pascal



Caracol con $b < 2a$.



Caracol con $b > 2a$.

La ecuación cartesiana del *caracol de Pascal* es

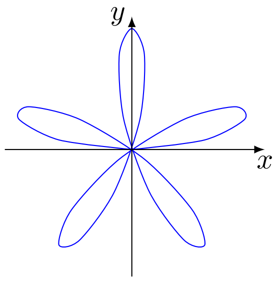
$$\left(x^2 + y^2 - 2ax)\right)^2 = b^2(x^2 + y^2)$$

que, al sustituir un cambio a coordenadas polares nos da la siguiente parametrización:

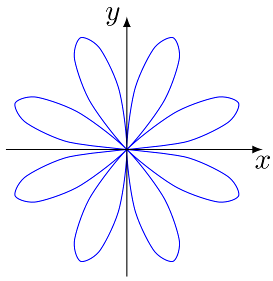
$$\alpha(t) = ((b + 2a\cos t)\cos t, (b + 2a\cos t)\operatorname{sen} t) \text{ con } t \in [0, 2\pi]$$

Si $b = 2a$ se obtiene una cardioide; y en caso contrario las curvas cuyas figuras representamos arriba.

Rosas



Rosa de cinco pétalos $\rho = a\operatorname{sen}(5\theta)$.



Rosa de ocho pétalos $\rho = a\operatorname{sen}(4\theta)$.

Las *rosas* es una familia de curvas de ecuación en coordenadas polares

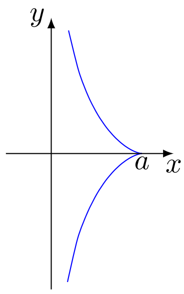
$$\rho = a\operatorname{sen}(k\theta) \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+$$

por tanto, se tiene la siguiente parametrización:

$$\alpha\colon (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \text{ definida } \alpha(t) = (a\operatorname{sen}(kt)\cos t, a\operatorname{sen}(kt)\operatorname{sen} t)$$

Obsérvese que el "número de pétalos" de la gráfica depende de la paridad del parámetro k. Si k es impar, la rosa se recorre dos veces y se obtienen k "pétalos" ; y si k es par se obtienen $2k$ "pétalos".

Tractriz



La tractriz es una curva que pasa por el punto $(0, a)$ que tiene la propiedad de que el segmento de la recta tangente que une el punto de la curva con el eje de ordenadas es constante a.

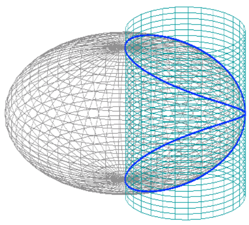
Una parametrización de la tractriz es

$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{sen} t \\ y &= a\left(\cos t + log\left(\tan(t/2)\right)\right) \end{aligned} \quad \text{con } t \in (0, \pi)$$

y otra parametrización es $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida

$$\alpha(t) = \left(\frac{a}{\cosh t}, a(t - \tanh t)\right)$$

Curva de Viviani



Esta curva alabeada se obtiene como la intersección de una esfera de radio $2a$ centrada en el origen de coordenadas

$$x^2 + y^2 = 4a^2$$

con un cilindro cuyo eje central es una recta vertical que pasa por el punto $(a, 0, 0)$, es decir, tiene por ecuación

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

Una parametrización de esta curva es la siguiente:

$$\alpha(t) = (a(1 + \cos t), a \operatorname{sen} t, 2a \operatorname{sen}(t/2))$$

donde el parámetro t varía en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

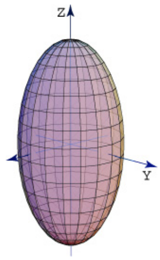
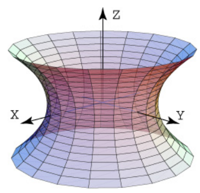
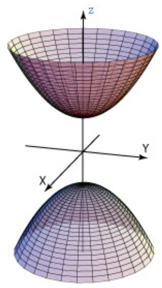
2. Superficies cuádricas

Agunas superficies muy usadas en las ingenierías son las llamadas *cuádricas* que, en general, se expresan como los puntos que verifican una ecuación cuadrática de tres variables:

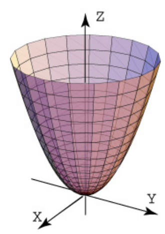
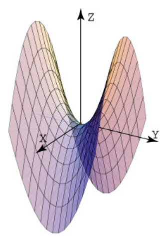
$$a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{22}y^2 + a_{23}yz + a_{33}z^2 = a_{00}$$

A continuación damos sus nombres y sus ecuaciones reducidas.

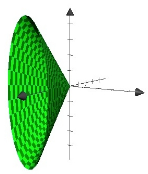
Cuádricas no degeneradas con centro

Elipsoide	Hiperboloide de una hoja	Hiperboloide de dos hojas
		
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
$x = a\cos(u)\cos(v)$ $y = b\,\mathrm{sen}(u)\cos(v)$ $z = c\,\mathrm{sen}(v)$	$x = a\cos(u)\cosh(v)$ $y = b\,\mathrm{sen}(u)\cosh(v)$ $z = c\,\mathrm{senh}(v)$	$x = a\cos(u)\,\mathrm{senh}(v)$ $y = b\,\mathrm{sen}(u)\,\mathrm{senh}(v)$ $z = c\cosh(v)$

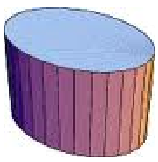
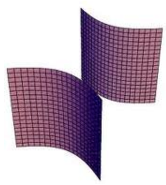
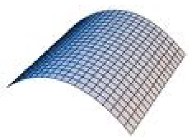
Cuádricas no degeneradas sin centro

Paraboide elíptico	Paraboloide hiperbólico
	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$
$x = av\cos(u)$ $y = bv\,\mathrm{sen}(u)$ $z = v^2$	$x = av\cosh(u)$ $y = bv\,\mathrm{senh}(u)$ $z = -v^2$

El cono es una cuádrica degenerada con centro

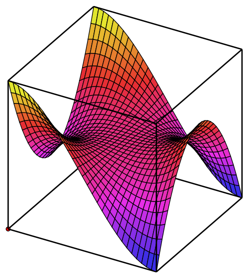
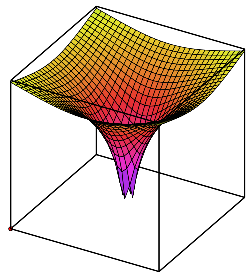
Cono elíptico

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$
$x = av\cos(u)$ $y = bv\,\mathrm{sen}(u)$ $z = cv$

Los cilindros son cuádricas degeneradas sin centro

Cilindro elíptico	Cilindro hiperbólico	Cilindro parabólico
		
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$y^2+4cz=0$
$x = a\cos(u)$ $y = b\,\mathrm{sen}(u)$ $z = v$	$x = a\cosh(u)$ $y = b\,\mathrm{senh}(u)$ $z = v$	$x = u$ $y = 2v$ $z = \dfrac{-v^2}{c}$

3. Otras superficies

Algunas superficies se definen como funciones, por ejemplo la llamada "silla del mono" y la "superficie embudo".

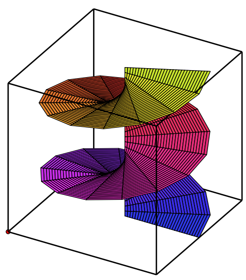
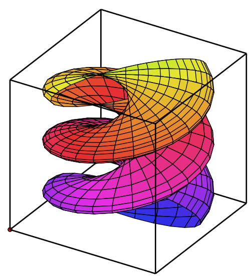
Silla del Mono	Superficie embudo
	
$z = x^3 - 3xy^2$	$z = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$

Helicoides generalizados o superficies de torsión

A partir de una curva plana $\alpha(x(t), y(t))$ con $t \in I$, creamos el helicoide generalizado generado por α como las superficie que se parametriza como

$$\Phi(u, v) = (x(v)\cos u, x(v)\operatorname{sen} u, cu + y(v)), \qquad (u, v) \in \mathbb{R} \times I$$

Así, por ejemplo, a partir de la recta generatriz $\alpha(t) = (at, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ obtenemos el *helicoide* y a partir de la esfera generatriz $\beta(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2k\pi]$ obtenemos la llamada *esfera de torsión*.

Helicoide	Estera de torsión
	
$x = av\cos u$ $y = av\operatorname{sen} u$ $z = cu$	$x = r\cos v\cos u$ $y = r\cos v\operatorname{sen} u$ $z = cu + r\operatorname{sen} v$