Matemáticas III
Relación de ejercicios
Tema 3

Curso 2011/2012

Solución (Ej. 1) — Como $s(t)=\int_0^t \sqrt{r^2\,\mathrm{sen}^t + r^2\cos^t}\,dt = r\,t$, tenemos que $t(s)=\frac{s}{r}$, luego

$$\beta(s)=(\alpha\circ t)(s)=\left(r\cos\frac{s}{r}, r\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{r}\right)$$

Solución (Ej. 2) — Tenemos $\alpha'(s)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y, puesto que

$$\|\alpha'(s)\|=\sqrt{\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2\,\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cos^2\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}=1$$

sabemos que α es una parametrización por arco y $\vec{t}=\alpha'(s)$.
Además $\alpha''(s)=\left(-\dfrac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$, de donde la curvatura es $\kappa=\frac{1}{2}$ y el vector normal es $\vec{n}=\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Por último el vector binormal es

$$\vec{b}=\vec{t}\times\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

y su derivada $\vec{b}\,'=-\dfrac{1}{2}\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)=-\dfrac{1}{2}\,\vec{n}$, por tanto la torsión es

$$\tau=\frac{1}{2}$$

Solución (Ej. 3) — Es fácil comprobar que $\beta''(s)=(-\frac{4}{5}\cos(s), \mathrm{sen}(s), \frac{3}{5}\cos(s))$ tiene módulo constante 1, luego la curvatura es $\kappa=1$. Por otro lado el vector binormal es constante $\vec{b}=\left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)$ y de aquí que $\vec{b}\,'(s)=\vec{0}$, luego la torsión es $\tau=0$ o lo que es lo mismo **la curva es plana**. Una curva plana de curvatura constante es una circunferencia (o un arco de circunferencia) y su radio es $R=1/\kappa=1$.
El centro podemos calcularlo haciendo la intersección de dos diámetros. Para $s=0$ tenemos un diámetro que es la recta $r1\equiv(4/5-4/5\lambda, 1, -3/5+3/5\lambda)$ y para $s=\pi/2$ tenemos otro diámetro $r2\equiv(0,\mu,0)$. La intersección de ambas es el centro $C=(0,1,0)$.

Solución (Ej. 4) — Para ver que la curva está contenida en la esfera $\mathbb{S}^2(a)$, tenemos que ver que la distancia al origen es a

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^4\,t+a^2\cos^2 t\,\mathrm{sen}^2\,t+a^2\cos^2 t}=a$$

Por otro lado, derivando y simplificando, obtenemos un vector (no unitario) en la dirección tangente a la curva

$$T = (\sin 2t, \cos 2t, -\sin t)$$

y un normal (unitario) a la curva es el propio vector de posición (porque está en una esfera) y que podemos simplificar,

$$N = \left(\sin^2 t, \cos t\ \sin t, \cos t\right)$$

Por tanto, el plano osculador (determinado por T y N) en un punto es:

$$\begin{vmatrix} x - a\ \sin^2 t & y - a\ \cos t\ \sin t & z - a\ \cos t \\ \sin 2t & \cos 2t & -\sin t \\ \sin^2 t & \cos t\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \sin 2t & \cos 2t & -\sin t \\ \sin^2 t & \cos t\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = 0$$

que, evidentemente, pasa por el origen de coordenadas.
De la misma forma, el vector binormal es proporcional a $T \times N = B(B1, B2, B3)$, por tanto, la ecuación del plano normal (determinado por los vectores N y B) en un punto se puede expresar

$$\begin{vmatrix} x - a\ \sin^2 t & y - a\ \cos t\ \sin t & z - a\ \cos t \\ \sin^2 t & \cos t\ \sin t & \cos t \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = 0$$

que, claramente, pasa por el origen.

Solución (Ej. 5) — Si C es el punto donde se cortan las rectas normales. La curva $\alpha = \beta - C$ cumple $\alpha' = \beta'$ y $\alpha'' = \beta''$, por tanto está parametrizada por longitud de arco y sus rectas normales se cortan en el origen de coordenadas. Esto último nos proporciona la ecuación

$$\alpha(s) = \lambda(s)\alpha''(s)$$

Sea $\kappa = \|\alpha''\|$ la curvatura de α (o de β). Así, tenemos $\alpha \cdot \alpha = \lambda^2\kappa^2$ y, puesto que $\alpha \cdot \alpha' = 0$, derivando

$$\alpha' \cdot \alpha' + \alpha \cdot \alpha'' = 0 \Rightarrow \lambda\kappa^2 = -1 \Rightarrow \lambda = -1/\kappa^2$$

Es decir $\|\alpha\| = 1/\kappa = R$. Derivando tenemos $R' = \frac{d\|\alpha\|}{ds} = \frac{\alpha\cdot\alpha'}{\|\alpha\|} = 0$, que nos prueba que el radio de curvatura es constante, y por tanto, **la curva está contenida en una esfera**.

Solución (Ej. 6) —

1. Si $y = \operatorname{arg\,senh} x$, entonces $x = \operatorname{senh} y$ y sabemos que

$$\cosh y = \tfrac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \operatorname{senh} y = \tfrac{e^y - e^{-y}}{2}$$
$$\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$$
$$e^y = \operatorname{senh} y + \cosh y$$

   De aquí se obtiene el resultado.

2. El vector velocidad es $\alpha'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$ de donde la longitud de arco

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(x)\|\, dx = \int_0^t \sqrt{e^{2x} + e^{-2x} + 2}\, dx = 2 \operatorname{senh} t$$

   luego $t = \operatorname{arg\,senh}(s/2) = \ln\left(\frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2+4}}{2}\right)$.
   De aquí que la curva parametrizada por longitud de arco es

$$\beta(s) = \left(\frac{s + \sqrt{s^2+4}}{2}, \frac{2}{s + \sqrt{s^2+4}}, \sqrt{2}\ \ln\left(\frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2+4}}{2}\right)\right)$$

Solución (Ej. 7) — Podemos suponer (haciendo una traslación) que el punto fijo es el origen de coordenadas y que está parametrizada por longitud de arco, entonces la curva α se puede expresar

$$\alpha(s) = \lambda(s)\alpha'(s)$$

derivando tenemos $\alpha' = \lambda'\alpha' + \lambda\alpha''$ y como $\alpha' \perp \lambda\alpha''$ tenemos

$$\alpha' \cdot (\alpha' - \lambda'\alpha') = 0 \Rightarrow \lambda' = 1 \Rightarrow \lambda = s + cte$$

De lo anterior deducimos que $(s + cte)\alpha''(s) = 0$, luego necesariamente ha de ser $\alpha'' = 0$ que hace que α' sea un vector constante que es equivalente a que α sea una recta.

Solución (Ej. 8) — Si parametrizamos una rama de esta curva como $\alpha(t) = (4t, 1/t)$ con $t > 0$, tenemos que $\alpha'(t) = (4, -1/t^2)$, luego un vector con la dirección normal en cada punto es $(1/t^2, 4)$ que nos da el haz de rectas normales en cada punto

$$N_t(\lambda) \equiv \begin{cases} x = 4t + \frac{\lambda}{t^2} \\ y = \frac{1}{t} + 4\lambda \end{cases}$$

Para encontrar cuáles de ellas pasan por el punto $(5,5)$ planteamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4t + \frac{\lambda}{t^2} = 5 \\ \frac{1}{t} + 4\lambda = 5 \end{cases} \iff \lambda = 5t^2 - 4t^3 \text{ y } 16\,t^4 - 20\,t^3 + 5\,t - 1 = 0$$

esta última ecuación polinómica tiene cuatro soluciones $t = 1$, $t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{4}$ y $t = -\frac{1}{2}$. Obsérvese que la última solución no se corresponde con la rama de la hipérbola elegida ($t > 0$) y además nos da la misma recta normal que $t = \frac{1}{2}$. Por tanto, las tres rectas normales se obtienen de los puntos $\alpha(t)$ y los vectores de dirección siguientes:

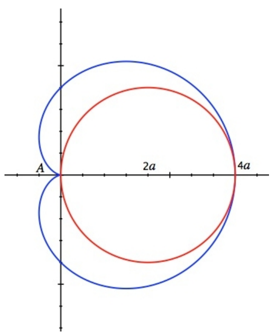
$$\begin{aligned} t = 1 &\Rightarrow \alpha(1) = (4,1), \vec{v} = (1,4) \Rightarrow y - 1 = 4(x-4) \\ t = \frac{1}{2} &\Rightarrow \alpha(1/2) = (2,2), \vec{v} = (4,4) \Rightarrow y - 2 = (x-2) \\ t = \frac{1}{4} &\Rightarrow \alpha(1/4) = (1,4), \vec{v} = (16,4) \Rightarrow y - 4 = \frac{1}{4}(x-1) \end{aligned}$$

Solución (Ej. 9) — La circunferencia se parametriza como $\mathcal{C} = (2a + 2a\cos t, 2a \operatorname{sen} t)$. Un vector en la dirección tangente es $(-\operatorname{sen} t, \cos t)$. Entonces la recta tangente que pasa por un punto en t es

$$T \equiv \frac{x - 2a\cos t - 2a}{-\operatorname{sen} t} = \frac{y - 2a \operatorname{sen} t}{\cos t} \equiv x\cos t + y \operatorname{sen} t = 2a + 2a\cos t$$

y la recta perpendicular a esta que pasa por el origen de coordenadas es

$$N \equiv x \operatorname{sen} t - y\cos t = 0$$



La intersección de R y N es el lugar geométrico que nos piden que es una curva

$$\alpha(t) = (2a\cos t\,(1 + \cos t), 2a \operatorname{sen} t\,(1 + \cos t))$$

y que se corresponde con una cardioide.

Solución (Ej. 10) —

1. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\, d\theta = 3\pi$.
2. $\int_0^a \sqrt{1+(2x)^2}\, dx = \frac{\operatorname{arg\,senh}(2\,a)}{4} + \frac{a\sqrt{4\,a^2+1}}{2}$
3. $\int_0^{2n\pi} \sqrt{2}\, e^{-t}\, dt = \sqrt{2}\, \left(1-e^{-2\,n\,\pi}\right)$.
4. Parametrizamos como $\alpha(t) = \left(t, t^2, \frac{2\,t^3}{3}\right)$ que toma los puntos en $t=0$ y $t=3$.

$$\int_0^3 \sqrt{1+4\,t^2+4\,t^4}\, dt = \int_0^3 (2t^2+1)\, dt = 21$$

Solución (Ej. 11) —

1. $\begin{cases} x(\theta) = 3\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ y(\theta) = 3\operatorname{sen}^2\theta \end{cases}$, luego $\kappa = \dfrac{|x'y''-y'x''|}{((x')^2+(y')^2)^{3/2}} = \dfrac{2}{3}$. Es una circunferencia.
2. Una parametrización estándar es $x(t)=t, y(t)=t^2$. Entonces $\kappa = \frac{2}{(4\,t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.
3. Haciendo $x(\theta) = e^{-\theta}\cos\theta$, $y(\theta) = e^{-\theta}\operatorname{sen}\theta$ tenemos $\kappa = \frac{e^\theta}{\sqrt{2}}$.
4. Con la parametrización dada en el problema anterior, tenemos

$$\kappa = \frac{\|\alpha'\times\alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{2}{(2t^2+1)^2}$$

y, como $\alpha'''(t) = (0,0,4)$, la torsión es:

$$\tau = \frac{\det(\alpha',\alpha'',\alpha''')}{\|\alpha'\times\alpha''\|^2} = \frac{2}{(2t^2+1)^2}$$

Solución (Ej. 12) — Una parametrización $\Phi = (x,y,z)$ es la siguiente:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos u\cos v \\ y = \cos u\operatorname{sen} v \\ z = \sqrt{2}\operatorname{sen} u \end{cases}$$

con $-\pi/2 < u < \pi/2$ y $0 < v < 2\pi$, obteniéndose el punto p con $u=\pi/4, v=3\pi/4$. Las derivadas parciales son

$$\Phi_u = \left(-\sqrt{2}\operatorname{sen} u\cos v, -\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v, \sqrt{2}\cos u\right)$$
$$\Phi_v = \left(-\sqrt{2}\cos u\ \operatorname{sen} v, \cos u\ \cos v, 0\right)$$

Así obtenemos una base del plano tangente en p:

$$\Phi_u\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},1\right) \text{ y } \Phi_v\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2},0\right)$$

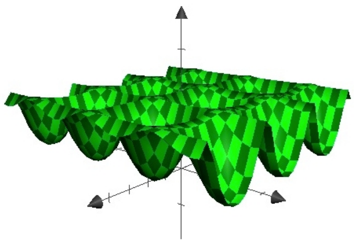
luego la ecuación del plano tangente en dicho punto es

$$-\sqrt{2}\,x + 2\,y + 2\,z = 4$$

El vector normal unitario en p es $N = \frac{\Phi_u\times\Phi_v}{\|\Phi_u\times\Phi_v\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$.

Solución (Ej. 13) —

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_p &= \begin{pmatrix} 2-\sin(u)^2\sin(v)^2 & \cos(u)\,\sin(u)\,\cos(v)\,\sin(v) \\ \cos(u)\,\sin(u)\,\cos(v)\,\sin(v) & \cos(u)^2\sin(v)^2+\cos(u)^2 \end{pmatrix} \\
N_p &= \left(-\frac{\sqrt{2}\cos(u)^2\cos(v)}{\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}}, -\frac{2\cos(u)^2\sin(v)}{\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}}, -\frac{\sqrt{2}\cos(u)\sin(u)}{\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}}\right) \\
\mathrm{II} &= \begin{pmatrix} \frac{2\cos(u)}{\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}} & 0 \\ 0 & \frac{\cos(u)\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}}{\cos(u)^2\sin(v)^2+1} \end{pmatrix} \\
dN_p &= \begin{pmatrix} -\frac{\cos(u)\sin(v)^2+\cos(u)}{\left(\cos(u)^2\sin(v)^2+1\right)\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}} & \frac{\sin(u)\cos(v)\sin(v)\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}}{2\cos(u)^4\sin(v)^4+4\cos(u)^2\sin(v)^2+2} \\ \frac{\sin(u)\cos(v)\sin(v)}{\left(\cos(u)^2\sin(v)^2+1\right)\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}} & -\frac{\left(\cos(u)^3-\cos(u)\right)\sin(v)^2+2\cos(u)}{\left(\cos(u)^2\sin(v)^2+1\right)\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}} \end{pmatrix} \\
K &= \frac{\left(\cos(u)^2-1\right)\sin(v)^4+\left(-\sin(u)^2\cos(v)^2+\cos(u)^2+1\right)\sin(v)^2+2}{2\cos(u)^6\sin(v)^6+6\cos(u)^4\sin(v)^4+6\cos(u)^2\sin(v)^2+2} \qquad (1) \\
H &= \frac{\left(\cos(u)^2\sin(v)^2+3\right)\sqrt{2\cos(u)^4\sin(v)^2+2\cos(u)^2}}{4\cos(u)^5\sin(v)^4+8\cos(u)^3\sin(v)^2+4\cos(u)}
\end{aligned}
$$

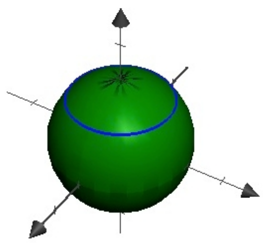


Solución (Ej. 14) — La comprobación es trivial.
La aplicaación de Gauss nos da

$$N(\theta)\left(-\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}, -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Si parametrizamos la esfera $\mathbb{S}^2$ de la forma

$$
\begin{aligned}
x(\varphi,\theta) &= \cos\varphi\cos\theta \\
y(\varphi,\theta) &= \cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\
z(\varphi,\theta) &= \operatorname{sen}\varphi
\end{aligned}
$$



donde φ nos da los paralelos y θ los meridianos, tenemos que $N(\theta,\rho)$ nos coincide con el paralelo de la esfera $\varphi = \pi/4$ (recorrido en sentido contrario).

Solución (Ej. 15) — Las curvas se corten en el punto $p = (-1, 1, 2) = \alpha(-1) = \beta(0)$. La comprobación de que ambas están contenidas en la superficie es trivial.

1. Tenenos dos vectores del plano tangente determinado por cada una de las curvas

$$\alpha'(-1) = (1, 0, -3),\ \ \beta'(0) = (1, -1, -4)$$

que tiene $\cos\theta = \frac{13}{3\sqrt{2}\sqrt{10}}$.

2. Parametrizando la superficie como $\Phi(u,v) = (u, v, u\,(u-v))$, tenemos

$$\Phi_u(u,v) = (1, 0, 2u - v),\ \Phi_v(u,v) = (0, 1, -u)$$

Calculamos la primera forma fundamental.

$$E = (2u - v)^2 + 1,\ F = -u\,(2u - v)\,,\ G = u^2 + 1$$

El punto $p = (-1, 1, 2)$ se tiene para $u = -1, v = 1$, luego la primera forma fundamental en este punto es $E = 10,\ F = -3,\ G = 2$.
Por otro lado, la curva α se obtiene de Φ para $u = t, v = 1 \Rightarrow u' = 1, v' = 0$. La curva β se obtiene de Φ para $u = t - 1, v = 1 - t \Rightarrow u' = 1, v' = -1$ El producto escalar de las curvas en punto es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 13$$

De igual manera se calcula

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 10 \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 18$$

De donde se obtiene el mismo coseno que en el apartado anterior.

Solución (Ej. 16) — Tenemos la primera forma fundamental, del ejercicio anterior.

$$E = (2u - v)^2 + 1,\ F = -u\,(2u - v)\,, G = u^2 + 1$$

De la ecuación implícita de la superficie $x(x - y) - z = 0$ podemos sacar el gradiente

$$\nabla f = (2x - y, -x, -1) = (2u - v, -u, -1)$$

Con este método puede que la orientación del vector normal sea contraria a la buscada, respecto a la base del plano tangente $\{\Phi_u, \Phi_v\}$, comprobamos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2u - v \\ 0 & 1 & -u \\ 2u - v & -u & -1 \end{vmatrix} = -(2u - v)^2 - u^2 - 1 < 0$$

luego, invertimos la orientación y normalizamos para obtener la aplicación de Gauss

$$N(u,v) = \left(\frac{v - 2u}{\sqrt{v^2 - 4uv + 5u^2 + 1}}, \frac{u}{\sqrt{v^2 - 4uv + 5u^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{v^2 - 4uv + 5u^2 + 1}} \right)$$

(Se podría haber hecho con el producto vectorial $\Phi_u \wedge \Phi_v$.) Las derivadas segundas de Φ son

$$\Phi_{uu} = (0, 0, 2),\ \Phi_{uv} = (0, 0, -1),\ \Phi_{vv} = (0, 0, 0)$$

Entonces

$$e = \langle N, \Phi_{uu} \rangle = \frac{2}{\sqrt{v^2 - 4\,u\,v + 5\,u^2 + 1}}$$
$$f = \langle N, \Phi_{uv} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{v^2 - 4\,u\,v + 5\,u^2 + 1}}$$
$$g = \langle N, \Phi_{vv} \rangle = 0$$

La curvatura de Gauss es

$$K = \frac{-1}{\left(v^2 - 4\,u\,v + 5\,u^2 + 1\right)^2}$$

y la curvatura media es

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \left(uv - u^2 + 1\right)\,\sqrt{v^2 - 4uv + 5u^2 + 1}$$

Solución (Ej. 17) — Si parametrimos como $\Phi(x,y) = (x, y, \operatorname{sen}(x+y))$, el endomorfismo de Weingarten, en cada punto es:

$$dN_p = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{sen}(y+x)}{(2\cos^2(y+x)+1)^{\frac{3}{2}}} & \frac{\operatorname{sen}(y+x)}{(2\cos^2(y+x)+1)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\operatorname{sen}(y+x)}{(2\cos^2(y+x)+1)^{\frac{3}{2}}} & \frac{\operatorname{sen}(y+x)}{(2\cos^2(y+x)+1)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

Solución (Ej. 18) — Parametrizando $\Phi(u,v) = \left(u^3, v^3, \left(-v^2 - u^2 + a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$, obtenemos el plano tangente $\sqrt{-v^2 - u^2 + a^{\frac{2}{3}}}\,\left(uv^2x + u^2vy - a^{\frac{2}{3}}u^2v^2\right) + u^2v^2z = 0$.
Por tanto los puntos de corte de este plano tangente con los tres ejes coordenados son

$$X = (a^{\frac{2}{3}}u, 0, 0),\ Y = (0, a^{\frac{2}{3}}v, 0),\ Z = \left(0, 0, a^{\frac{2}{3}}\sqrt{-v^2 - u^2 + a^{\frac{2}{3}}}\right)$$

de donde la suma de las tres distancias al origen al cuadrado es

$$a^{\frac{4}{3}}u^2 + a^{\frac{4}{3}}v^2 + a^{\frac{4}{3}}(-v^2 - u^2 + a^{\frac{2}{3}}) = a^2$$